УДК 519.85

О.О. Ємець, Є.М. Ємець, Т.О. Парфьонова, Т.В. Чілікіна
Полтавський університет економіки та торгівлі, м. Полтава, Україна
tv.0502@gmail.com

Лінійні умовні задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях та їх розв'язування

У статті розглядається умовна лінійна повністю комбінаторна задача оптимізації на переставленнях. Пропонується її розв'язування методом гілок та меж. Визначено три можливі варіанти оцінювання допустимих підмножин в методі гілок та меж. Запропоновано правила галуження та відсікання допустимих підмножин в методі гілок та меж для лінійної умовної задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях.

Останні десятиліття у зв'язку з потребами практики швидко розвивається теорія і методи дискретної та комбінаторної оптимізації [1-9]. Широкий клас задач оптимізації складають задачі евклідової умовної оптимізації на переставленнях. Для цих задач та їх окремих постановок [4-9] використовуються як точні, так і наближені методи. При цьому алгоритм методу гілок і меж використовуються як у схемах точних методів [10], [11], так і в схемах одержання наближених розв'язків названих задач.

Мета даної статті – розвинути методику оцінювання допустимих множин в методі гілок та меж та обґрунтувати підхід до розгалуження допустимих множин.

Постановка лінійної задачі. Розглянемо умовну лінійну повністю комбінаторну задачу оптимізації на переставленнях [4], тобто задачу знаходження пари $\left\langle C\left(x^*\right),\ x^*\right\rangle$:

$$C\left(x^*\right) = \min_{x\in R^k} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j\ ; \tag{1}$$

$$x^* = \arg\min_{x\in R^k} \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \tag{2}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j = b_j,\ \text{i=1,2,...,l}; \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_j,\ \text{i=l+1, l+2,...,m}; \tag{4}$$

$$x = \left(x_1,...,x_k\right) \in E_{kn}\left(G\right), \tag{5}$$

де $E_{kn}\left(G\right)$ – множина переставлень з елементів мультимножини $G = \left\{g_1,...,g_k\right\}$, серед яких n елементів різних; a_{ij}, b_j, c_j – задані дійсні числа для всіх можливих в задачі індексах i та j, а k, m, n – задані натуральні сталі, $n \le k$, l – ціла стала $l \le 0,\ 1 \le \text{m}$.

Розв'язуючи задачу (1) – (5) методом гілок та меж, треба вміти давати оцінку допустимих множин D_i, на яких розбита підмножина допустимих розв'язків D, $i = 1, 2,..., \mathrm{p}$. Тобто множин D_i, що мають властивості:

$$D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_p = D; \tag{6}$$

$$D_i \neq \varnothing \ \forall i \in J_p; \tag{7}$$

$$D_i \cap D_j = \varnothing \ \forall i \neq j; i, j \in J_p, \tag{8}$$

де тут і далі $J_p = \{1, 2,..., \mathrm{p}\}$ позначимо множину перших p натуральних чисел. Як відомо [12], [13] за оцінку множини D_i в задачі знаходження

$$F(x^*) = \min_{x \in R^k} F(x), \tag{9}$$

$$x^* = \arg\min_{x \in R^k} F(x), \tag{10}$$

$$x \in D \subset R^k, \tag{11}$$

де $F(x): R^k \xrightarrow{F} R^1$, може слугувати число υ_i, яке має властивість:

$$\upsilon_i \leq F(x) \ \forall \mathrm{x} \in \mathrm{D}_i \ \forall i \in J_p.$$

Природним підходом до галуження та оцінювання в методі гілок та меж до задачі (1) – (5) є такий.

Умова (5) означає, що $x = (x_1,..., x_k)$ є переставленням чисел (взагалі кажучи, дійсних чисел) $g_1,..., g_k$. Нехай, не обмежуючи загальності,

$$g_1 \leq g_2 \leq ... \leq g_k. \tag{12}$$

За множину D слугує множина точок $x \in R^k$, що задовольняють умовам (3) – (5).

Тому за D_t, $\mathrm{t} \in \mathrm{J}_k$ можемо розглянути множину

$$D_t^\tau = \left\{ x = (x_1,..., x_k) \in R^k \,\middle|\, x_\tau = g_t; \sum_{j \in J_k \setminus \{t\}} a_{ij} x_j + a_{i\tau} g_t = b_i \ \forall i \in J_l; \right.$$
$$\left. \sum_{j \in J_k \setminus \{t\}} a_{ij} x_j + a_{i\tau} g_t \leq b_i \ \forall i \in J_m \setminus J_l \right\}, \tag{13}$$

якщо вона не порожня, $\tau \in J_k$.

Очевидно, що для D_t^τ та D_s^τ в представлені (13) виконується (8), а $\bigcup_{t=1}^{k} D_t^\tau = D$.

Непорожню множину $D_{i_1}^{\tau_1}$, якщо вона містить принаймні два елементи вигляду (13), можна розгалужувати на підмножини $D_{i_1 t}^{\tau_1 \tau_2}$, $\mathrm{t} \in \mathrm{J}_{k-1}$,

$$D_{i_1 t}^{\tau_1 \tau_2} = \left\{ x = (x_1,..., x_k) \in R^k \,\middle|\, x_{\tau_1} = g_{i_1}, x_{\tau_2} = g_\tau, \tau_1 \neq \tau_2, t \neq i_1; \right.$$
$$\left. \sum_{j \in J_k \setminus \{\tau_1, \tau_2\}} a_{ij} x_j + a_{i\tau_1} g_{i_1} + a_{i\tau_2} g_t \leq b_i \ \forall i \in J_m \setminus J_l \right\}. \tag{14}$$

Очевидно, що для $D_{i_1 t}^{\tau_1 \tau_2}$ та $D_{i_1 s}^{\tau_1 \tau_2}$ в представлені (14) виконується (8), а

$$\bigcup_{t=1}^{k-1} D_{i_1 t}^{\tau_1 \tau_2} = D_{i_1}^{\tau_1}.$$

На $(r+1)$-му рівні аналогічно розбиття $r \le k-1$ допустимої множини матимемо

$$D_{i_1 i_2 \ldots i_r t}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r \tau_{r+1}} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_k) \in R^k \;\middle|\; x_{\tau_j} = g_{ij}; \ldots; x_{{r+1}} = g_t, t \ne i_j,\ i_j \in J_k \right.$$

$$\left. \sum_{j \in J_k \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_r\}} a_{ij} x_j + \sum_{\forall j \in J_r} a_{i\tau_i} g_{i_j} = b_i \ \forall i \in J_l; \quad \sum_{j \in J_k \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_2\}} a_{ij} x_j + \sum_{\forall j \in J_r} a_{i\tau_j} g_{i_j} \le b_i \quad \forall i \in J_m \setminus J_l \right\} \quad (15)$$

З використанням теореми 3.1 з [4] та означення оцінки обґрунтовано наступні твердження.

Теорема 1. Оцінкою $\upsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ множини $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ з (15) в методі гілок та меж може слугувати $\forall r \in J_k$ число

$$\sum_{j \in J_r} \overline{c}_{\tau_j} \overline{g}_{i_j} = \upsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}. \quad (16)$$

Якщо $c_i \ge 0;\ g_j \ge 0\ \forall i \in J_k$ та забезпечено виконання умови:

$$c_{\alpha_{i_1}} \ge c_{\alpha_{i_2}} \ge \ldots \ge c_{\alpha_{i_r}},$$

яку, позначивши $c_{\alpha_{i_j}} = \overline{c}_{i_j}\ \ \forall j \in J_r$, запишемо

$$\overline{c}_{\tau_1} \ge \overline{c}_{\tau_2} \ge \ldots \ge \overline{c}_{\tau_r}\ \ r \in J_k, \quad (17)$$

та умови

$$g_{\beta_{i_1}} \le g_{\beta_{i_2}} \le \ldots \le g_{\beta_{i_r}},$$

яку, позначивши $g_{\beta_{i_j}} = \overline{g}_{i_j}\ \ \forall j \in J_r$, запишемо

$$\overline{g}_{i_1} \le \overline{g}_{i_2} \le \ldots \le \overline{g}_{i_r}\ \ r \in J_k. \quad (18)$$

Теорема 2. Оцінкою $\nu_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ множини $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ з (15) в методі гілок та меж може бути число, що визначається формулою:

$$\nu_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r} = \sum_{j=1}^{r} c_{\tau_j} g_{i_j}, \quad (19)$$

якщо $c_i \ge 0;\ g_i \ge 0\ \forall i \in J_k$.

Теорема 3. Оцінкою $\xi_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ множини $D_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ з (15) в методі гілок та меж може бути величина

$$\xi_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r} = \nu_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r} + \sum_{j=1}^{s} \tilde{c}_{i_j} \tilde{g}_{i_j}, \quad (20)$$

де $s = k - r$; величина $\nu_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r}$ обчислюється за (19), і $\tilde{c}_{i_j}$ та $\tilde{g}_{i_j}$ задовольняють умови (21) та (22) відповідно:

$$\tilde{c}_{i_1} \ge \tilde{c}_{i_2} \ge \ldots \ge \tilde{c}_{i_s}, \quad (21)$$

$$\tilde{g}_{i_1} \le \tilde{g}_{i_2} \le \ldots \le \tilde{g}_{i_s}. \quad (22)$$

Теорема 4. Нехай задача (1) – (5) має обмеження вигляду

$$\sum_{j=1}^{k_\alpha} \alpha_j x_{i_j} \le \alpha_0; \quad (23)$$

$$\sum_{j=1}^{k_\beta} \beta_j x_{i_j} \le \beta_0; \qquad (24)$$

$$\sum_{j=1}^{k_\gamma} \gamma_j x_{i_j} = \gamma_0 \qquad (25)$$

та розв'язується методом гілок та меж $\alpha_j \ne 0,\ \beta_0 \ne 0,\ \gamma_0 \ne 0;\ \mathrm{k}_\alpha \le k;\ \mathrm{k}_\beta \le k;\ \ \mathrm{k}_\gamma \le k$. Нехай утворена множина допустимих розв'язків $D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}$. Нехай виконується умова (22) та

$$\overline{\alpha}_1 \ge \overline{\alpha}_2 \ge \dots \ge \overline{\alpha}_{s_\alpha} > 0 > \overline{\alpha}_{s_\alpha+1} \ge \overline{\alpha}_{k_\alpha},\ \mathrm{s}_\alpha \in J_k^0, \qquad (26)$$

$$\overline{\beta}_1 \ge \dots \ge \overline{\beta}_{s_\beta} > 0 > \overline{\beta}_{s_\beta+1} \ge \overline{\beta}_{k_\beta},\ \mathrm{s}_\beta \in J_k^0, \qquad (27)$$

$$\overline{\gamma}_1 \ge \dots \ge \overline{\gamma}_{s_\gamma} > 0 > \overline{\gamma}_{s_\gamma+1} \ge \overline{\gamma}_{k_\gamma},\ \mathrm{s}_\gamma \in J_k^0, \qquad (28)$$

де мультимножини $\overline{A} = \left\{\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_{k_\alpha}\right\}$ та $A = \left\{\alpha_1, \dots, \alpha_{k_\alpha}\right\}$; $\overline{B} = \left\{\overline{\beta}_1, \dots, \overline{\beta}_{k_\beta}\right\}$ та $B = \left\{\beta_1, \dots, \beta_{k_\beta}\right\}$; $\overline{\Gamma} = \left\{\overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_{k_\gamma}\right\}$ та $\Gamma = \left\{\gamma_1, \dots, \gamma_{k_\gamma}\right\}$ попарно рівні: $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$, $\overline{\Gamma} = \Gamma$, а $J_k^0 = J_k \cup \{0\}$.

Тоді множина $D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}$ порожня, коли

$$\alpha_0 \notin [\alpha_{\min}; \alpha_{\max}] = \left[\sum_{j=1}^{s_\alpha} \overline{\alpha}_j g_{i_j} + \sum_{j=1}^{k_\alpha - s_\alpha} \overline{\alpha}_{s_\alpha+j} g_{i_{s-r_\alpha+j}}; \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^{s_\alpha} \overline{\alpha}_j g_{i_{s-j+1}} + \sum_{j=1}^{k_\alpha - s_\alpha} \overline{\alpha}_{s_\alpha+j} g_{i_{r_\alpha-j+1}} \right], \qquad (29)$$

та

$$\alpha_0 < \alpha_{\min}, \qquad (30)$$

де $r_\alpha = k_\alpha - s_\alpha$; або коли

$$\beta_0 \notin \left[\sum_{j=1}^{s_\beta} \overline{\beta}_j g_{i_j} + \sum_{j=1}^{k_\beta - s_\beta} \overline{\beta}_{s_\beta+j} g_{i_{s-r_\beta+j}};\ \sum_{j=1}^{s_\beta} \overline{\beta}_j g_{i_{s-j+1}} + \sum_{j=1}^{k_\beta - s_\beta} \overline{\beta}_{s_\beta+j} g_{i_{r_\beta-j+1}} \right], \qquad (31)$$

та

$$\beta_0 > \beta_{\max}, \qquad (32)$$

де $r_\beta = k_\beta - s_\beta$; або коли

$$\gamma_0 \notin [\gamma_{\min}; \gamma_{\max}] = \left[\sum_{j=1}^{s_\gamma} \overline{\gamma}_j g_{i_j} + \sum_{j=1}^{k_\gamma - s_\gamma} \overline{\gamma}_{s_\gamma+j} g_{i_{s-r_\gamma+j}}; \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^{s_\gamma} \overline{\gamma}_j g_{i_{s-j+1}} + \sum_{j=1}^{k_\gamma - s_\gamma} \overline{\gamma}_{s_\gamma+j} g_{i_{r_\gamma-j+1}} \right], \qquad (33)$$

де $r_\gamma = k_\gamma - s_\gamma$.

Теорема 5. Нехай для елементів мультимножини G виконується умова (12), а коефіцієнти цільової функції упорядковані за спаданням, а допустима множина $D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r}$

задачі (1) – (5) в методі гілок та меж визначається (13) – (15), тоді між оцінками існує співвідношення:

$$\xi_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r} \le \xi_{i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_{r+\chi}}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r \tau_{r+1} \ldots \tau_{r+\chi}}, \tag{34}$$

$r+\chi \le k$; $\forall r \in J_{k-1}$; $\forall \chi \in J_{k-1}^0$;

$$\xi_{i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_{r+\chi}}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r \tau_{r+1} \ldots \tau_{r+\chi}} \le \xi_{i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+j_1} \ldots i_{r+j_\chi}}^{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r \tau_{r+1} \ldots \tau_{r+\chi}}, \tag{35}$$

$r \in J_{k-1}^0$; $\chi \in J_{k-1}^0$; $j_t \in \{i_{r+1}, \ldots, i_k\}$ $\forall t \in J_\chi$.

В роботі запропоновано новий підхід до розв’язування для лінійних умовних задач оптимізації на переставленнях на основі використання методу гілок та меж.

Як перспективи подальших досліджень можна вказати поширення цього підходу до нелінійних задач оптимізації на переставленнях.

Література

1. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / Сергиенко И.В. − К. : Наукова думка, 1988. − 472 с.
2. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. − К. : Наукова думка, 1981. − 288 с.
3. Сергиенко И.В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования / И.В. Сергиенко, В.П. Шило. – К. : Наукова думка, 2003. – 263 с.
4. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К. : Ін-т системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.
5. Стоян Ю.Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
6. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : учеб. пособие / Емец О.А. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с.
7. Ємець О.О. Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв’язування / О.О. Ємець, О.В. Роскладка. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 129 с.
8. Ємець О.О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними функціями / О.О. Ємець, Л.М. Колєчкіна. – К. : Наукова думка, 2005. – 117 с.
9. Емец О.А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О.А. Емец, Т.Н. Барболина. – К. : Наукова думка, 2008. – 159 с.
10. Ємець О.О Оцінювання допустимих множин розв’язків комбінаторної транспортної задачі на переставленнях, що розв’язується методом гілок та меж / О.О. Ємець, Т.О. Парфьонова // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2010. – № 1. – С. 21-28.
11. Емец О.А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ / О.А. Емец, Т.А. Парфенова // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 5. – С. 1-7.
12. Математические методы исследования операций : [учеб. пособие для вузов] / Ю.М. Ермольев, И.И. Ляшко, В.И. Тюптя, В.И. Михалевич. – К. : Вища шк., Головное изд-во, 1979. – 312 с.
13. Линейное и нелинейное программирование / [Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З.]. − К. : Вища школа, 1975. − 372 с.

Literatura

1. Sergienko I.V. Kiev : Naukova dumka. 1988. 472 p.
2. Sergienko I.V. Kiev : Naukova dumka. 1981. 288 p.
3. Sergienko I.V. Kiev : Naukova dumka. 2003. 263 p.
4. Stojan Ju.G. Kiev : Instytut systemnih doslidzhen' osvity. 1993. 188 p.
5. Stojan Ju.G. Poltava : RVC PUSKU. 2005. 103 p.
6. Emec O.A. Kiev : UMK VO. 1992. 92 p.
7. Emec O.A. Poltava : RVC PUSKU. 2006. 129 p.

8. Emec O.A. Kiev : Naukova dumka. 2005. 117 p.
9. Emec O.A. Kiev : Naukova dumka. 2008. 159 p.
10. Emec O.A Naukovi visti NTUU «KPI». 2010.№ 1. P. 21-28
11. Emec O.A. Kibernetika i sistemnyj analiz. 2010. № 5. P. 1-7
12. Ermol'evJu.M. Kiev : Vishha shkola. Golovnoe izd-vo.1979. 312 p.
13. Ljashenko I.N. Kiev : Vishha shkola. 1975. 372 p.

О.А. Емец, Е.М. Емец, Т.А. Парфенова, Т.В. Чиликина

Линейные условные задачи комбинаторной оптимизации на перестановках и их решение

В работе рассматривается условная линейная полностью комбинаторная задача отпимизации на перестановках. Предлагается решать её методом ветвей и границ. Определены три возможных варианта оценивания допустимых подмножеств в методе ветвей и границ. Предложены правила ветвления и отсечения допустимых подмножеств в методе ветвей и границ для условной линейной комбинаторной задачи отпимизации на перестановках.

O.O. Yemets, Ye.M. Yemets, T.O. Parfonova., T.V. Chilikina

Linear Hypothetical Problems of Combinatorial Optimization at Transpositions and their Solution

In the article the hypothetical linear fully combinatorial task of optimization on transpositions is considered. It is suggested to solve it by the branch-and-bound method. Certain three possible variants of evaluation of possible subsets in the branch-and-bound method. The rules of branching and pruning of possible subsets in the branch-and-bound method for the hypothetical linear combinatorial task of optimization at transpositions are offered.

Стаття надійшла до редакції 19.04.2011.